Zur Elektrodynamik turbulent bewegter leitender Medien

I. Grundzüge der Elektrodynamik der mittleren Felder

K.-H. Rädler

Institut für Magnetohydrodynamik Jena der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

(Z. Naturforsch. **23 a**, 1841—1851 [1968]; eingegangen am 22. August 1968)

This paper deals with the behaviour of electromagnetic fields in electrically conducting media carrying out turbulent motions. The basis is formed by Maxwell's and the corresponding constitutive equations inclusive Ohm's law, all with the neglections usual in magnetohydrodynamics. Attention is directed to certain mean fields defined by statistical averaging.

From the equations mentioned above, except Ohm's law, one gets equations of the same kind for the mean fields. In Ohm's law, however, the transition to the mean fields leads to an additional term $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$, the averaged vector product of the fluctuations in the velocity of the medium and the magnetic flux density. The investigation of this term makes up the centre in the elaboration of an electrodynamics of mean fields.

As a very simple example a homogeneous isotropic turbulence showing reflexion symmetry is considered. In this case $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ makes allowance for the introduction of a modified electrical conductivity. If the reflexion symmetry is violated, $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ describes an effect allowing a dynamo action.

Furthermore, a general method for calculation of $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ for arbitrary turbulent motions is developed, and a survey is given of the results which can be expected for some special kinds of turbulence.

Einführung

1. Die Frage nach der Wechselwirkung elektromagnetischer Felder mit elektrisch leitender flüssiger oder gasförmiger Materie, die zu turbulenter Bewegung angeregt wird, hat in letzter Zeit eine vielfältige Bedeutung erlangt. Sie ist insbesondere im Hinblick auf stellare und planetare Magnetfelder aufgeworfen worden, hat sich aber beispielsweise auch im Zusammenhang mit magnetohydrodynamischen Generatoren und mit Induktionspumpen für flüssige Metalle sowie bei den Bemühungen um die magnetische Einschließung heißer Plasmen ergeben.

Unsere Untersuchung soll zur Klärung dieser Frage beitragen. Wir befassen uns in erster Linie damit, wie sich eine gegebene Bewegung eines elektrisch leitenden kontinuierlichen Mediums auf darin vorhandene elektromagnetische Felder auswirkt. Dabei treten sowohl die Ursachen der Bewegung als auch der Einfluß in den Hintergrund, den jene Felder auf die letztere ausüben. Wir bemühen uns aber nicht darum, den durch die turbulente Bewegung hervorgerufenen verwickelten räumlichen und zeitlichen Verlauf der elektromagnetischen Felder in Einzelheiten zu erfassen. Man kann bekanntlich jene Bewegung als Überlagerung einer mittleren Bewegung mit turbulenten Schwankungen auffassen, und Entsprechendes gilt für die elektromagnetischen Felder. Unsere Aufmerksamkeit richtet sich letztlich allein auf die mittleren elektromagnetischen Felder.

2. In der Vergangenheit sind Vorstellungen entwickelt worden, wonach die turbulenten Schwankungen in der Bewegung eines elektrisch leitenden Mediums die mittleren elektromagnetischen Felder ebenso beeinflussen, wie es bestimmte Änderungen der elektrischen Leitfähigkeit und der magnetischen Permeabilität des Mediums tun würden. Demzufolge kann man das Auftreten jener Schwankungen bei der Berechnung der mittleren Felder einfach durch die Einführung abgewandelter Werte für diese beiden Materialgrößen berücksichtigen. Erste Ergebnisse dieser Art haben Sweet 1950 [1] und Csada 1951 [2] veröffentlicht, weitere teilten Elsasser 1956 [3], Moffatt 1961 [4] sowie Csada 1961 [5] mit. Eine Reihe wesentlicher Gedanken ist von Steenbeck 1961 [6] und 1963 [7] dargelegt worden. Zur Illustration er-

[1] P. A. Sweet, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **110**, 69 [1950].
[2] I. K. Csada, Acta Phys. Hung. **1**, 235 [1951].
[3] W. M. Elsasser, Rev. Mod. Phys. **28**, 135 [1956].
[4] K. Moffatt, J. Fluid Mech. **11**, 625 [1961].
[5] I. K. Csada, Vortrag auf dem Symposium über theoretische Physik in Balatonföldvár im September 1961 (unveröffentlicht).
[6] M. Steenbeck, Beitr. Plasmaphysik **1**, 153 [1961].
[7] M. Steenbeck, Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin **5**, 625 [1963].

wähnen wir, daß die Werte beider Materialgrößen nach den Abschätzungen des letzteren [6] für die Wasserstoffkonvektionszone der Sonne um eine bis zwei Zehnerpotenzen zu verringern sind.

Die turbulenten Schwankungen in der Bewegung des Mediums können aber auch Wirkungen auf die mittleren elektromagnetischen Felder hervorrufen, die sich nicht durch Änderungen von Leitfähigkeit und Permeabilität erfassen lassen. Beispiele dafür wurden von STEENBECK 1961 [6] und weiterhin von STEENBECK, KRAUSE und dem Verfasser 1963 [8] behandelt. Auf neuere Erkenntnisse, die sich in diesem Zusammenhang ergeben haben, gehen wir später noch ein.

3. Durch die geschilderte Entwicklung angeregt, streben wir danach, eine weitgehend allgemeine Elektrodynamik der mittleren Felder in turbulenten leitenden Medien aufzubauen. Zunächst werden einige Grundgedanken dargelegt und an solchen Beispielen erläutert, die sich auf besonders einfache Formen der turbulenten Bewegung beziehen. Danach wird ein Verfahren begründet, mit dem sich beliebige turbulente Bewegungen erfassen lassen, und ein gewisser Überblick darüber gegeben, welche Ergebnisse in einigermaßen einfachen Fällen zu erwarten sind. Während wir in dieser Untersuchung von den erwähnten turbulenzbedingten Leitfähigkeits- und Permeabilitätsänderungen lediglich die erstere kurz erörtern, sollen in der anschließenden beide mit Hilfe jenes Verfahrens ausführlich behandelt werden.

Grundgedanken

1. Unsere Betrachtungen bauen auf der Grundlage der nichtrelativistischen Magnetohydrodynamik auf. Wir führen zunächst eine Reihe von Feldgrößen ein, nämlich die magnetische Kraftflußdichte $\boldsymbol{B}$, die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$, die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$, die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{j}$ sowie die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, mit der sich das Medium bewegt. Das letztere weise eine konstante magnetische Permeabilität μ und eine ebensolche elektrische Leitfähigkeit σ auf.

Unter den Voraussetzungen der nichtrelativistischen Magnetohydrodynamik können die Maxwell-Gleichungen und auch die für bewegte Medien geltenden Materialgleichungen wesentlich vereinfacht werden. Im praktischen Maßsystem erhält man

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{1}$$

sowie

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}). \tag{2}$$

Daraus lassen sich $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{j}$ bestimmen, falls $\boldsymbol{v}$ gegeben ist. Es ist dabei zweckmäßig, von (1) und (2) zunächst zu

$$\frac{1}{\mu\sigma} \Delta \boldsymbol{B} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{3}$$

überzugehen. Gelingt es, $\boldsymbol{B}$ zu ermitteln, so liefern (1) und (2) dann ohne weiteres $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{j}$.

Den einleitenden Bemerkungen gemäß soll $\boldsymbol{v}$ nicht nur an dieser Stelle, sondern auch im folgenden als vorgegeben gelten. Damit setzen wir uns zunächst über die Schwierigkeiten hinweg, die sich aus dem Einfluß des Magnetfeldes auf die Bewegung des Mediums ergeben. Daß dies nicht unbedingt auf eine Vernachlässigung eines solchen Einflusses hinausläuft, wird noch deutlich werden.

Natürlich muß man (1), (2) und auch (3), um die Lösungen eindeutig bestimmen zu können, noch durch geeignete Rand- und Anfangsbedingungen ergänzen. Wir werden dies im folgenden als selbstverständlich betrachten und derartige Nebenbedingungen nur dort erwähnen, wo sie sich als besonders bedeutsam erweisen.

2. Bei Turbulenz zeigen alle bisher benutzten Feldgrößen unregelmäßige räumliche und zeitliche Schwankungen. Um eine Mittelung einzuführen, betrachten wir jede derart schwankende Feldgröße F als Zufallsfunktion. Die entsprechende mittlere Feldgröße $\overline{F}$ wird als mathematische Erwartung der letzteren erklärt und $F - \overline{F}$ mit F' bezeichnet. Dann gilt beispielsweise

$$\begin{gathered} F = \overline{F} + F', \quad \overline{\overline{F}} = \overline{F}, \quad \overline{F'} = 0, \\ \overline{F + G} = \overline{F} + \overline{G}, \quad \overline{\overline{F}\,\overline{G}} = \overline{F}\,\overline{G}, \quad \overline{\overline{F}\,G'} = 0, \\ \overline{F\,G} = \overline{F}\,\overline{G} + \overline{F'\,G'}, \end{gathered} \tag{4}$$

wobei neben F auch G eine beliebige Feldgröße darstellt. Ferner ist diese Mittelung mit beliebigen räumlichen und zeitlichen Differentiationen und Integrationen in der Reihenfolge vertauschbar.

Wenn man unsere auf Zufallsfunktionen bezogene und daher statistische Mittelung durch eine solche ersetzt, die auf Grund einer räumlichen oder zeitlichen Glättung der schwankenden Feldgrößen erklärt wird, so ergibt sich nur insofern eine Ände-

[8] M. STEENBECK, F. KRAUSE u. K.-H. RÄDLER, Sitzungsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math., Phys., Tech. Nr. 1/1963.

rung, als ein Teil von (4) als Näherung zu verstehen ist. Letztere ist daran gebunden, daß sich die mittleren Feldgrößen innerhalb der für die Glättung maßgebenden Bereiche nur wenig ändern. Da wir im folgenden gar nicht die Mittelungsvorschrift selbst, sondern nur (4) und jene Vertauschungsregeln verwenden, darf man in dieser Näherung die hier eingeführten mittleren Feldgrößen auch im Sinne räumlicher oder zeitlicher Glättungen deuten.

Wir wollen von einer Betrachtung „im Kleinen“ sprechen, wenn dabei die räumlichen und zeitlichen Schwankungen der Feldgrößen interessieren, und von einer Betrachtung „im Großen“, wenn es nur auf mittlere Feldgrößen ankommt.

3. Die Aufgabe einer Elektrodynamik der mittleren Felder sehen wir im wesentlichen darin, das Verhalten von $\overline{\boldsymbol{B}}$, $\overline{\boldsymbol{H}}$, $\overline{\boldsymbol{E}}$ und $\overline{\boldsymbol{j}}$ zu bestimmen, wenn $\overline{\boldsymbol{v}}$ und gewisse für $\boldsymbol{v}'$ kennzeichnende Größen gegeben sind.

Nach den Bemerkungen über die Mittelung folgen aus (1) und (2) die Gleichungen

$$\operatorname{rot} \overline{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \overline{\boldsymbol{B}}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \overline{\boldsymbol{H}} = \overline{\boldsymbol{j}}, \quad \operatorname{div} \overline{\boldsymbol{B}} = 0 \qquad (5)$$

und $$\overline{\boldsymbol{B}} = \mu \overline{\boldsymbol{H}}, \quad \overline{\boldsymbol{j}} = \sigma(\overline{\boldsymbol{E}} + \overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}} + \overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}). \qquad (6)$$

Sie stimmen formal weitgehend mit (1) und (2) überein. Lediglich das infolge einer Nichtlinearität auftretende $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ verursacht eine Abweichung. Um $\overline{\boldsymbol{B}}$, $\overline{\boldsymbol{H}}$, $\overline{\boldsymbol{E}}$ und $\overline{\boldsymbol{j}}$ aus (5) und (6) ausrechnen zu können, muß neben $\overline{\boldsymbol{v}}$ auch $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ bekannt sein.

Letzteres bietet Anlaß, den Term $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ genauer zu betrachten. Durch Eintragen von $\boldsymbol{B} = \overline{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{B}'$ und $\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}'$ in (3) entsteht

$$\begin{gathered}\frac{1}{\mu\sigma} \Delta(\overline{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{B}') + \operatorname{rot}(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}} + \overline{\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{B}' \\ + \boldsymbol{v}' \times \overline{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}') - \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{B}') = 0, \\ \operatorname{div}(\overline{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{B}') = 0.\end{gathered} \qquad (7)$$

Soweit $\overline{\boldsymbol{B}}$, $\overline{\boldsymbol{v}}$ und $\boldsymbol{v}'$ gegeben sind, wird damit $\boldsymbol{B}'$ festgelegt. Demnach darf man $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ als Funktional von $\overline{\boldsymbol{B}}$, $\overline{\boldsymbol{v}}$ und $\boldsymbol{v}'$ auffassen. Da es selbst eine gemittelte Größe darstellt, kann es auch $\boldsymbol{v}'$ nur in Gestalt derartiger Größen enthalten. Im übrigen gehen natürlich die zur Lösung von (7) notwendigen Rand- und Anfangsbedingungen für $\boldsymbol{B}'$ ein; wir lassen dies aber zunächst unberücksichtigt und werden später noch einmal darauf zurückkommen.

Wenn jenes Funktional für $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ bekannt wäre, könnte man es in (6) eintragen. Dann bildete (5) zusammen mit (6) ein Gleichungssystem, auf Grund dessen sich $\overline{\boldsymbol{B}}$, $\overline{\boldsymbol{H}}$, $\overline{\boldsymbol{E}}$ und $\overline{\boldsymbol{j}}$ aus $\overline{\boldsymbol{v}}$ und geeigneten Angaben über $\boldsymbol{v}'$ ermitteln ließen. Die Bestimmung eines solchen Funktionals ist daher als Angelpunkt für die Ausarbeitung einer Elektrodynamik der mittleren Felder anzusehen.

4. Bevor wir uns dieser Aufgabe zuwenden, soll noch eine Analogie besprochen werden, welche die Rolle von $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ in (6) etwas genauer erkennen läßt.

Dazu bemerken wir, daß wir uns von vornherein stillschweigend auf solche Medien beschränkt haben, die keine eingeprägten elektromotorischen Kräfte aufweisen. Derartige zusätzliche Ursachen für elektrische Ströme sind aber beispielsweise infolge räumlicher Unterschiede in Zusammensetzung und Temperatur der Medien durchaus möglich. Man pflegt sie zu berücksichtigen, indem man in (2) neben $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ als weiteren Summanden eine eingeprägte Feldstärke $\boldsymbol{E}^{(e)}$ einträgt. Wir wollen Medien mit überall verschwindendem $\boldsymbol{E}^{(e)}$ als „passive“, alle anderen als „aktive“ bezeichnen.

Das Auftreten von $\boldsymbol{E}^{(e)}$ in (2) entspricht formal gerade dem von $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ in (6). In diesem Sinne verhält sich ein im Kleinen passives Medium bei turbulenter Bewegung im Großen wie ein aktives. Soll diese Aussage aber nicht nur formale Bedeutung haben, so muß sie etwas eingeschränkt werden. Wir wollen nur dann davon reden, daß die turbulente Bewegung einem Medium einen aktiven Charakter verleiht, wenn sie Energie für den Aufbau oder die Erhaltung der mittleren elektromagnetischen Felder zu liefern vermag.

Einfache Beispiele

1. Unsere Aufmerksamkeit richtet sich nun darauf, wie $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ als Funktional von $\overline{\boldsymbol{B}}$, $\overline{\boldsymbol{v}}$ und $\boldsymbol{v}'$ aussieht. Im Sinne einer Einführung sollen jedoch zunächst nur mehr oder weniger heuristische Gedanken verfolgt und stark vereinfachte Verhältnisse betrachtet werden.

Dabei wie auch später bedienen wir uns neben der Vektorrechnung in symbolischer Schreibweise weitgehend des Tensorkalküls, beziehen ihn aber stets nur auf kartesische Raumkoordinaten. Wird ein Vektor beispielsweise mit $\boldsymbol{A}$ bezeichnet, so sind mit A sein Betrag und mit A_i seine kartesischen Komponenten gemeint. Es bedeuten δ_{ij} den Kronecker-Tensor und ε_{ijk} den vollkommen antisymmetrischen

Tensor dritter Stufe mit $\varepsilon_{123} = 1$ für Rechtssysteme. Ferner wird die Summationskonvention verwendet.

2. Wir sehen es geradezu als Kennzeichen der Turbulenz an, daß Größen wie $\boldsymbol{v}'$ und $\boldsymbol{B}'$ in einem beliebigen Raum- und Zeitpunkt nur dann eine merkliche Korrelation mit irgendwelchen Größen in anderen Raum- und Zeitpunkten aufweisen, wenn sowohl der räumliche als auch der zeitliche Abstand nicht zu groß sind. Demnach braucht man aber, um $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ für einen gegebenen Raum- und Zeitpunkt bestimmen zu können, $\overline{\boldsymbol{B}}$ und ebenso $\overline{\boldsymbol{v}}$ und $\boldsymbol{v}'$ nur in einer entsprechenden räumlichen und zeitlichen Umgebung desselben zu kennen.

Aus dem gleichen Grunde werden auch die Rand- und Anfangsbedingungen für $\boldsymbol{B}'$ unwesentlich, sobald man die Abstände von der Berandung des betrachteten räumlichen Bereiches und vom Anfangszeitpunkt hinreichend groß wählt. Letztere Bedingung soll im folgenden stets erfüllt sein.

3. Unter diesen Umständen besagt (7) nicht nur, daß $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ als Funktional von $\overline{\boldsymbol{B}}$, $\overline{\boldsymbol{v}}$ und $\boldsymbol{v}'$ aufzufassen ist, sondern weiterhin, daß dieses in $\overline{\boldsymbol{B}}$ linear und homogen sein muß. Zur Vereinfachung setzen wir die Ortsabhängigkeit von $\overline{\boldsymbol{B}}$ als so schwach und die Zeitabhängigkeit als soweit vernachlässigbar voraus, daß bereits seine Komponenten und deren erste Ortsableitungen in einem gegebenen Raum- und Zeitpunkt das Verhalten in einer Umgebung desselben, wie sie im vorangehenden besprochen wurde, genau genug bestimmen. Dann muß aber

$$(\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'})_i = a_{ij} \overline{B}_j + b_{ijk} \frac{\partial \overline{B}_j}{\partial x_k} \tag{8}$$

gelten, wobei die Tensoren a_{ij} und b_{ijk} Funktionale von $\overline{\boldsymbol{v}}$ und $\boldsymbol{v}'$ und im übrigen natürlich gemittelte Größen darstellen.

Um den Einfluß des Magnetfeldes auf die turbulente Bewegung zu erfassen, kann man beispielsweise $\boldsymbol{v}'$ mit $\overline{\boldsymbol{B}}$ verknüpfen. Es sei vermerkt, daß dies die Gültigkeit von (8) nicht berührt. Natürlich hängen a_{ij} und b_{ijk} dann mittelbar von $\overline{\boldsymbol{B}}$ ab.

4. Wir wollen nun die Gestalt von a_{ij} und b_{ijk} erörtern. Der Einfachheit halber gelte dabei $\overline{\boldsymbol{v}} = 0$, so daß die letzteren nur noch Funktionale von $\boldsymbol{v}'$ und zugleich, wie gesagt, gemittelte Größen sind. Ferner sollen dem $\boldsymbol{v}'$-Feld gewisse einfache Symmetrieeigenschaften zugeschrieben werden.

Das $\boldsymbol{v}'$-Feld entspreche einer homogenen Turbulenz. Wir verstehen darunter, daß alle aus $\boldsymbol{v}'$ ableitbaren gemittelten Größen ungeändert bleiben, wenn man dieses Feld beliebigen Parallelverschiebungen unterwirft. Daraus ergibt sich, daß a_{ij} und b_{ijk} ortsunabhängig sind.

Das $\boldsymbol{v}'$-Feld soll überdies eine isotrope Turbulenz darstellen. Damit ist gemeint, daß sich jene aus $\boldsymbol{v}'$ ableitbaren Größen auch durch beliebige Drehungen dieses Feldes um beliebige Achsen nicht beeinflussen lassen. Wir betrachten insbesondere die Achsen, welche durch den Ursprung des Koordinatensystems verlaufen, und folgern, daß die Komponenten von a_{ij} und b_{ijk} gegenüber beliebigen Drehungen des Koordinatensystems invariant sein müssen. Tensoren, deren Komponenten diese letztere Eigenschaft aufweisen, pflegt man als isotrop zu bezeichnen. Was die zweite und dritte Stufe betrifft, können sie sich nur um skalare Faktoren von δ_{ij} und ε_{ijk} unterscheiden. So ergibt sich

$$a_{ij} = \alpha\, \delta_{ij}\,, \qquad b_{ijk} = \beta\, \varepsilon_{ijk}\,, \tag{9}$$

wobei α und β skalare Funktionale von $\boldsymbol{v}'$ und überdies ortsunabhängige und gemittelte Größen bedeuten.

Indem wir isotrope Turbulenz verlangen, schließen wir das Auftreten von bevorzugten Achsen in der Bewegung des Mediums aus. So bleibt insbesondere auch die Möglichkeit einer ausrichtenden Wirkung des Magnetfeldes unberücksichtigt. Es handelt sich dabei um eine Vereinfachung, die mindestens für gewisse schwache Magnetfelder berechtigt ist.

Nebenbei bemerkt, läßt sich aus der Isotropie der Turbulenz, solange man bei den oben gewählten Definitionen bleibt, die Homogenität derselben folgern. Dies hängt damit zusammen, daß zwei aufeinanderfolgende beliebige Drehungen um zwei beliebige windschiefe Achsen stets durch eine Drehung und eine Parallelverschiebung zu ersetzen sind.

5. Faßt man (8) und (9) zusammen, so ergibt sich

$$\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'} = \alpha\, \overline{\boldsymbol{B}} - \beta \operatorname{rot} \overline{\boldsymbol{B}}\,. \tag{10}$$

Damit kehren wir zu (5) und (6) zurück, wo nunmehr $\overline{\boldsymbol{v}} = 0$ zu setzen ist, und schreiben die letzte dieser Beziehungen in

$$\overline{\boldsymbol{j}} = \frac{\sigma}{1 + \mu\, \sigma\, \beta} (\overline{\boldsymbol{E}} + \alpha\, \overline{\boldsymbol{B}}) \tag{11}$$

um. Nach dieser Abänderung bilden (5) und (6) ein abgeschlossenes System, aus dem man $\overline{\boldsymbol{B}}$, $\overline{\boldsymbol{H}}$, $\overline{\boldsymbol{E}}$ und $\overline{\boldsymbol{j}}$ bestimmen könnte, wenn die von $\boldsymbol{v}'$ abhängigen α und β bekannt wären.

6. Bei der Erörterung von (11) wollen wir das $\boldsymbol{v}'$-Feld vorübergehend noch einer weiteren Symmetrieforderung unterwerfen. Wir verlangen nämlich, daß sich jene aus $\boldsymbol{v}'$ ableitbaren gemittelten Größen bei Spiegelung dieses Feldes an beliebigen Ebenen nicht ändern. Wegen der Isotropiebedingung muß dies gleichzeitig für Spiegelung an beliebigen Punkten und insbesondere für die am Ursprung des Koordinatensystems gelten. Bei der letzteren geht ein irgendwie vorgegebenes $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}'^*(\boldsymbol{x}, t)$ in $\boldsymbol{v}' = -\boldsymbol{v}'^*(-\boldsymbol{x}, t)$ über. Wir greifen zunächst auf (7) zurück, woraus wir uns (10) hergeleitet denken dürfen. Soweit (7), wo wiederum $\overline{\boldsymbol{v}} = 0$ zu setzen ist, mit $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}'^*(\boldsymbol{x}, t)$ durch irgendwelche $\overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{x}, t)$ und $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}'^*(\boldsymbol{x}, t)$ befriedigt wird, trifft dies gleichermaßen auf $\boldsymbol{v}' = -\boldsymbol{v}'^*(-\boldsymbol{x}, t)$ sowie $\overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{B}}^*(-\boldsymbol{x}, t)$ und $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}'^*(-\boldsymbol{x}, t)$ zu. Dieselbe Eigenschaft muß natürlich auch (10) aufweisen. Ergibt sich mit $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}'^*(\boldsymbol{x}, t)$ etwa $\alpha = \alpha^*$ und $\beta = \beta^*$, so führt $\boldsymbol{v}' = -\boldsymbol{v}'^*(-\boldsymbol{x}, t)$ demnach auf $\alpha = -\alpha^*$ und $\beta = \beta^*$. Es dürfen sich aber α und β, weil sie gemittelte Größen darstellen, bei jener Spiegelung des $\boldsymbol{v}'$-Feldes nicht ändern. Daraus folgt $\alpha = 0$. Für β bekommt man keine Einschränkung.

Eine Spiegelung führt bekanntlich eine Rechtsschraube in eine Linksschraube über und umgekehrt. Soweit das $\boldsymbol{v}'$-Feld der oben eingeführten Spiegelungsbedingung genügt, kann also in der Bewegung des Mediums kein Schraubensinn vor dem anderen ausgezeichnet sein. Letzteres äußert sich beispielsweise in $\overline{\boldsymbol{v}' \operatorname{rot} \boldsymbol{v}'} = 0$.

Aus der Gültigkeit jener Spiegelungsbedingung kann man übrigens auf die Isotropie der Turbulenz und nach dem Vorangehenden weiter auf ihre Homogenität schließen. Dabei ist wesentlich, daß sich eine beliebige Drehung stets durch zwei aufeinanderfolgende Spiegelungen an Ebenen darstellen läßt.

7. Wir bleiben zunächst bei der Annahme, daß die Spiegelungsbedingung erfüllt, also $\alpha = 0$ sei. Dann stellt (11) eine Verknüpfung zwischen $\overline{\boldsymbol{j}}$ und $\overline{\boldsymbol{E}}$ dar, die, voraussetzungsgemäß für $\overline{\boldsymbol{v}} = 0$ gültig, weitgehend mit der zwischen $\boldsymbol{j}$ und $\boldsymbol{E}$ für $\boldsymbol{v} = 0$ übereinstimmt. Der Unterschied besteht allein darin, daß das im letzteren Falle maßgebende σ im ersteren durch

$$\sigma_{\mathrm{T}} = \frac{\sigma}{1 + \mu \sigma \beta} \tag{12}$$

vertreten wird. In diesem Zusammenhang wollen wir σ als „substanzeigene" und σ_{T} als „turbulenzbedingte" Leitfähigkeit bezeichnen.

Soweit die bisher eingeführten Voraussetzungen gelten, dürfen also die mittleren elektromagnetischen Felder wie ungemittelte behandelt werden. Man hat dabei lediglich die substanzeigene Leitfähigkeit durch die turbulenzbedingte zu ersetzen.

Das für σ_{T} bestimmende β hängt, wie bereits erörtert, von $\boldsymbol{v}'$ ab. Für $\boldsymbol{v}' = 0$ muß natürlich $\sigma_{\mathrm{T}} = \sigma$ gelten. Falls man die Vorstellung anerkennt, daß ein gegebenes $\overline{\boldsymbol{B}}$-Feld in einem turbulenten Medium mit $\overline{\boldsymbol{v}} = 0$ um so rascher zerfällt, je größer $\overline{v'^2}$ ist, kann man weiter schließen, daß σ_{T} mit wachsendem $\overline{v'^2}$ fällt. Diese Erkenntnisse entsprechen denen, die wir eingangs erwähnten.

8. Wenn das $\boldsymbol{v}'$-Feld die Spiegelungsbedingung verletzt, kann $\alpha \neq 0$ sein. Gemäß (11) tritt dann ein Anteil von $\overline{\boldsymbol{j}}$ auf, der zu $\overline{\boldsymbol{B}}$ proportional ist. Steenbeck, Krause und der Verfasser haben 1966 [9] gezeigt, daß dieser eine elektromagnetische Rückkopplung ermöglicht. Im Zusammenhang damit ist ein mit $\alpha \overline{\boldsymbol{B}}$ zu vergleichender Term für solche $\boldsymbol{v}'$-Felder berechnet worden, die der inhomogenen, daher auch anisotropen, durch Coriolis-Kräfte beeinflußten Turbulenz im Erdinneren oder auf Sternen entsprechen. Infolge der Coriolis-Kräfte kommt dabei ein bevorzugter Schraubensinn ins Spiel. An diese Ergebnisse anschließend, haben Steenbeck und Krause 1966 [10] und 1967 [11] über eine Reihe von Dynamomechanismen berichtet, die das Zustandekommen der Magnetfelder der Erde, der Sonne und der magnetischen Sterne zu erklären vermögen.

Wie aus dem Gesagten hervorgeht, kann die turbulente Bewegung eines elektrisch leitenden Mediums im Falle $\alpha \neq 0$ Energie für den Aufbau und die Erhaltung der mittleren elektromagnetischen Felder liefern. Im Sinne der oben eingeführten Redeweise zeigt das Medium also, solange $\alpha \neq 0$ gilt, einen aktiven Charakter.

[9] M. Steenbeck, F. Krause u. K.-H. Rädler, Z. Naturforsch. **21 a**, 369 [1966].

[10] M. Steenbeck u. F. Krause, Z. Naturforsch. **21 a**, 1285 [1966].

[11] F. Krause u. M. Steenbeck, Z. Naturforsch. **22 a**, 671 [1967]. — M. Steenbeck u. F. Krause, Magnitnaja Gidrodinamika **3**, 19 [1967]; deutsche Übersetzung in „Gustav Hertz in der Entwicklung der modernen Physik", Akademie-Verlag, Berlin 1967, S. 155—177.

Allgemeine Beziehungen für $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$

1. Wir wollen $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ nun unter weniger einschränkenden Voraussetzungen betrachten, die Beziehung (8) verallgemeinern und zeigen, wie sich die dabei an Stelle von a_{ij} und b_{ijk} auftretenden Koeffizienten aus $\overline{\boldsymbol{v}}$ und $\boldsymbol{v}'$ berechnen lassen.

Als Ausgangspunkt dienen die Gln. (7). Berücksichtigt man weiter diejenigen, die daraus durch Mittelung hervorgehen, so folgt

$$\frac{1}{\mu\sigma}\Delta\boldsymbol{B}' + \operatorname{rot}(\overline{\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{B}') - \frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t} = -\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}' \times \overline{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{C}), \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B}' = 0\,. \tag{13}$$

Zur Abkürzung wurde dabei

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}')' = \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}' - \overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'} \tag{14}$$

eingeführt. Es sollen $\overline{\boldsymbol{v}}$, $\boldsymbol{v}'$ und $\overline{\boldsymbol{B}}$, bis auf weiteres aber auch noch $\boldsymbol{C}$ als gegeben gelten. Wir fragen zunächst nach $\boldsymbol{B}'$. Die Berandung des räumlichen Bereiches, auf den wir (13) beziehen, befinde sich im Unendlichen. Abgesehen von selbstverständlichen Regularitätsforderungen, sind dann nur noch Anfangswerte für $\boldsymbol{B}'$ erforderlich, um dieses eindeutig festzulegen.

Für das Folgende ist es zweckmäßig, zur tensoriellen Schreibweise überzugehen, in der (13) durch

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu\sigma}\Delta B_i' + \varepsilon_{imn}\varepsilon_{npq}\frac{\partial}{\partial x_m}(\bar{v}_p B_q') - \frac{\partial B_i'}{\partial t} &= -\varepsilon_{imn}\frac{\partial}{\partial x_m}(\varepsilon_{npq} v_p' \overline{B}_q + C_n), \\ \frac{\partial B_i'}{\partial x_i} &= 0\end{aligned} \tag{15}$$

wiedergegeben wird.

2. Um die Lösung von (15) in allgemeiner Form angeben zu können, führen wir Greensche Funktionen $G_{il}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}', t')$ ein. Sie werden für beliebige $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{x}'$, jedoch nur für $t > t'$ benötigt. In diesem Variablenbereich sollen sie dem Gleichungssystem

$$\frac{1}{\mu\sigma}\Delta G_{il} + \varepsilon_{imn}\varepsilon_{npq}\frac{\partial}{\partial x_m}(\bar{v}_p G_{ql}) - \frac{\partial G_{il}}{\partial t} = 0 \tag{16}$$

sowie den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} G_{il} &\to 0 \qquad &&\text{für} \quad |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| \to \infty, \\ G_{il} &\to \delta_{il}\,\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') &&\text{für} \quad t - t' \to 0 \end{aligned} \tag{17}$$

genügen, wobei sich Δ auf $\boldsymbol{x}$ bezieht und mit $\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$ eine Diracsche Deltafunktion für drei Dimensionen gemeint ist.

Als Beispiel betrachten wir den einfachen Fall $\overline{\boldsymbol{v}} = 0$, auf den wir auch später wieder zurückkommen werden. Für diesen folgt aus (16) und (17) eindeutig

$$\begin{aligned} G_{il}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}', t') &= \delta_{il}\, G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', t - t'), \\ G(\boldsymbol{x}, t) &= \left(\frac{\mu\sigma}{4\pi t}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu\sigma x^2}{4t}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Dabei ist G nichts anderes als die Lösung der Wärmeleitungsgleichung für einen „Einheitspol" in einem unendlich ausgedehnten homogenen Medium mit der Temperaturleitfähigkeit $1/\mu\sigma$.

Soweit $\overline{\boldsymbol{v}}$ eine zeitunabhängige ebene Scherströmung beschreibt, lassen sich die G_{il} leicht aus früheren Rechnungen des Verfassers [12] ableiten. Daran anknüpfend, hat KRAUSE [13] die G_{il} für alle $\overline{\boldsymbol{v}}$ mit orts- und zeitunabhängigen $\partial \bar{v}_i / \partial x_j$ ermittelt und darüber hinaus die Existenz der G_{il} für beliebige $\overline{\boldsymbol{v}}$ mit stetigen $\partial \bar{v}_i / \partial x_j$ bewiesen.

3. Nach diesen Vorbereitungen schreiben wir

$$\begin{aligned} B_i'(\boldsymbol{x}, t) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} G_{il}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}', t_0)\, B_l'(\boldsymbol{x}', t_0)\, \mathrm{d}^3x' \\ &= \iiint_{-\infty}^{\infty}\int_{t_0}^{t} G_{il}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}', t')\, \varepsilon_{lmn}\frac{\partial}{\partial x_m'}\left(\varepsilon_{npq} v_p'(\boldsymbol{x}', t')\, \overline{B}_q(\boldsymbol{x}', t') + C_n(\boldsymbol{x}', t')\right) \mathrm{d}^3x'\, \mathrm{d}t'. \end{aligned} \tag{19}$$

Wie es sein muß, gehen die Ausdrücke rechterhand für den Anfangsaugenblick $t = t_0$ dank der zweiten Bedingung (17) tatsächlich in $B_i'(\boldsymbol{x}, t_0)$ über. Ferner genügt (19) der ersten Gl. (15); dies wird durch (16) zusammen mit der zweiten Bedingung (17) sichergestellt. Demnach befriedigt (19) aber auch die Gleichung

$$\frac{1}{\mu\sigma}\Delta\frac{\partial B_i'}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B_i'}{\partial x_i} = 0\,, \tag{20}$$

[12] K.-H. RÄDLER, Beitr. Plasmaphys. 4, 21 [1964].

[13] F. KRAUSE, Z. Angew. Math. Mech. 48, 333 [1968].

die sich durch eine verjüngende Differentiation aus jener ersten von (15) ergibt. Nach dem Vorangehenden erlaubt (20) allein dann ein von Null verschiedenes $\partial B_i'/\partial x_i$, wenn ein solches für $t=t_0$ vorhanden ist. So zeigt sich, daß (19) nicht nur der ersten, sondern auch der zweiten Gl. (15) genügt, sofern diese letztere durch $B_i'(\boldsymbol{x}, t_0)$ befriedigt wird.

Die Schlüsse, welche soeben dargelegt wurden, sind natürlich an gewisse Konvergenzeigenschaften der in (19) auftretenden Integrale gebunden. Soweit die Existenz der G_{il} geklärt wurde, lassen sich diese Eigenschaften unschwer nachweisen.

4. Als Anfangsbedingung wählen wir $\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{x}, t_0)=0$, so daß das erste Integral in (19) verschwindet. Die Bedeutung dieser Vereinfachung wird später erörtert werden. Wenn man nunmehr in (19) eine partielle Integration bezüglich x_m' ausführt und dabei die erste Bedingung (17) beachtet, ergibt sich

$$B_i'(\boldsymbol{x}, t) = -\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial G_{il}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}', t')}{\partial x_m'}\, \varepsilon_{lmn}(\varepsilon_{npq}\, v_p'(\boldsymbol{x}', t')\, \overline{B}_q(\boldsymbol{x}', t') + C_n(\boldsymbol{x}', t'))\, \mathrm{d}^3x'\, \mathrm{d}t'. \tag{21}$$

Dies liefert

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{B}')_i = \varepsilon_{ijk}\, v_j'(\boldsymbol{x}, t)\, B_k'(\boldsymbol{x}, t) = &-\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}\,\varepsilon_{npq}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial G_{kl}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}', t')}{\partial x_m'}\, v_j'(\boldsymbol{x}, t)\, v_p'(\boldsymbol{x}', t')\,\overline{B}_q(\boldsymbol{x}', t')\, \mathrm{d}^3x'\, \mathrm{d}t' \\ &-\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial G_{kl}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}', t')}{\partial x_m}\, v_j'(\boldsymbol{x}, t)\, C_n(\boldsymbol{x}', t')\, \mathrm{d}^3x'\, \mathrm{d}t',\end{aligned} \tag{22}$$

woraus alles weitere abgeleitet werden soll.

5. Zunächst vergleichen wir die beiden Integrale in (22) für kleine $\boldsymbol{v}'$. In diesem Grenzfall verhält sich das erste wie ein Ausdruck zweiter Ordnung in den v_i'; denn wir dürfen annehmen, daß mit den letzteren nicht auch $\overline{B}_q$ verschwindet. Das zweite Integral ist nach (14) und (21) als von mindestens dritter Ordnung in den v_i' anzusehen.

Soweit wir uns mit einer ersten Näherung für kleine $\boldsymbol{v}'$ begnügen, darf das zweite Integral in (22) gestrichen werden. Durch Mittelung über die verbleibenden Terme entsteht dann

$$\overline{(\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{B}')}_i = -\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}\,\varepsilon_{npq}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial G_{kl}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}', t')}{\partial x_m'}\,\overline{v_j'(\boldsymbol{x}, t)\, v_p'(\boldsymbol{x}', t')}\,\overline{B}_q(\boldsymbol{x}', t')\, \mathrm{d}^3x'\, \mathrm{d}t'. \tag{23}$$

Um zu einer zweiten Näherung fortzuschreiten, brauchen wir nur die in erster Näherung gebildeten C_n in (22) einzutragen. Drückt man diese gemäß (14) durch die entsprechenden $(\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{B}')_n$ und $\overline{(\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{B}')}_n$ aus und unterwirft (22) dann einer Mittelung, so verschwinden auf der rechten Seite alle Terme mit $\overline{(\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{B}')}_n$. Die in erster Näherung gültigen $(\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{B}')_n$ sind selbst wieder aus (22) zu entnehmen, wobei aber, wie gesagt, das letzte Integral wegfällt. Mithin ergibt sich eine Beziehung, die nur darin von (23) abweicht, daß auf der rechten Seite ein weiterer Term hinzutritt, nämlich

$$\begin{aligned}+\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}\,\varepsilon_{nj'k'}\,\varepsilon_{l'm'n'}\,\varepsilon_{n'pq}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{t_0}^{t}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{t_0}^{t'}&\frac{\partial G_{kl}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}', t')}{\partial x_m'}\,\frac{\partial G_{k'l'}(\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{x}'', t'')}{\partial x_{m'}''} \\ &\times\overline{v_j'(\boldsymbol{x}, t)\, v_{j'}'(\boldsymbol{x}', t')\, v_p'(\boldsymbol{x}'', t'')}\,\overline{B}_q(\boldsymbol{x}'', t'')\,\mathrm{d}^3x''\,\mathrm{d}t''\,\mathrm{d}^3x'\,\mathrm{d}t'.\end{aligned} \tag{24}$$

Wie von der ersten zur zweiten, so kann man leicht auch zur dritten und schließlich zu beliebig hohen Näherungen gelangen, in die neben den Korrelationstensoren $\overline{v_j'\, v_p'}$ und $\overline{v_j'\, v_{j'}'\, v_p'}$ auch solche von entsprechend hoher Stufe eingehen.

6. Wir rechnen im folgenden mit

$$\overline{(\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{B}')}_i = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{t_0}^{t} K_{iq}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)\,\overline{B}_q(\boldsymbol{\xi}, \tau)\,\mathrm{d}^3\xi\,\mathrm{d}\tau. \tag{25}$$

Was die erste Näherung betrifft, so wird dies durch (23) gerechtfertigt, woraus weiterhin

$$K_{iq}(\boldsymbol{x}, t;\ \boldsymbol{\xi}, \tau) = -\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}\,\varepsilon_{npq}\,\frac{\partial G_{kl}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial \xi_m}\,\overline{v_j'(\boldsymbol{x}, t)\,v_p'(\boldsymbol{\xi}, \tau)} \tag{26}$$

zu entnehmen ist. Zur zweiten Näherung übergehend, bemerken wir, daß sich Integrationsfolge und -grenzen in (24) derart abwandeln lassen, daß dort $\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{t_0}^{t} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{t''}^{t} \ldots \mathrm{d}^3x'\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3x''\,\mathrm{d}t''$ erscheint. Auf Grund dessen bleibt (25) richtig, und man hat auf der rechten Seite von (26) den Term

$$+\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}\,\varepsilon_{nj'k'}\,\varepsilon_{l'm'n}\,\varepsilon_{n'pq}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\partial G_{kl}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{x}', t')}{\partial x_m'}\,\frac{\partial G_{k'l'}(\boldsymbol{x}', t'; \boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial \xi_{m'}'}\,\overline{v_j'(\boldsymbol{x}, \mathrm{t})\,v_{j'}'(\boldsymbol{x}', t')\,v_p'(\boldsymbol{\xi}, \tau)}\,\mathrm{d}^3x'\,\mathrm{d}t' \tag{27}$$

hinzuzufügen. Auf dem angedeuteten Wege läßt sich (25) bis zu beliebig hohen Näherungen begründen und (26) entsprechend ergänzen, worauf wir aber nicht genauer eingehen wollen.

7. Schließlich soll (25) in eine Form gebracht werden, die der von (8) entspricht. Dabei bauen wir auf der naheliegenden, später noch genauer zu erörternden Vorstellung auf, daß $K_{iq}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)$ nur für gewisse kleine $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|$ und $t - \tau$ wesentlich von Null abweiche. Dann interessiert $\overline{B}_q(\boldsymbol{\xi}, \tau)$ bei beliebigem festen $\boldsymbol{x}$ und t jeweils nur in einer entsprechenden Umgebung von $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}$ und $\tau = t$. Wir nehmen an, daß es sich dort durch die Potenzreihe

$$\overline{B}_q(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \overline{B}_q(\boldsymbol{x}, t) + \sum_{\varkappa+\nu \geq 1} \frac{(\xi_r - x_r)\ldots(\xi_t - x_t)}{\varkappa!}\,\frac{(\tau - t)^\nu}{\nu!}\,\frac{\partial^{\varkappa+\nu}\,\overline{B}_q(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_r \ldots \partial x_t\,\partial t^\nu} \tag{28}$$

darstellen lasse. So ergibt sich

$$\overline{(\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}')}_i = g_{iq}^{(00)}(\boldsymbol{x}, t)\,\overline{B}_q(\boldsymbol{x}, t) + \sum_{\varkappa+\nu \geq 1} g_{iqr\ldots t}^{(\varkappa\nu)}(\boldsymbol{x}, t)\,\frac{\partial^{\varkappa+\nu}\,\overline{B}_q(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_r \ldots \partial x_t\,\partial t^\nu} \tag{29}$$

mit

$$g_{iqr\ldots t}^{(\varkappa\nu)}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\varkappa!\,\nu!}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{t_0}^{t} K_{iq}(\boldsymbol{x}, t;\ \boldsymbol{\xi}, \tau)\,(\xi_r - x_r)\ldots(\xi_t - x_t)\,(\tau - t)^\nu\,\mathrm{d}^3\xi\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{30}$$

In (28) wie auch in (29) entspricht der erste Term rechterhand $\varkappa = \nu = 0$, und die Summation ist über alle anderen Wertepaare aus nichtnegativen ganzzahligen $\varkappa$ und ν zu erstrecken; (30) gilt für alle genannten $\varkappa$ und ν. Natürlich sind $(\xi_r - x_r)\ldots(\xi_t - x_t)$ und $g_{iqr\ldots t}^{(\varkappa\nu)}$ für $\varkappa = 0$ durch 1 und $g_{iq}^{(0\nu)}$, für $\varkappa = 1$ durch $(\xi_r - x_r)$ und $g_{iqr}^{(1\nu)}$ zu ersetzen, und Entsprechendes gilt für die Ableitungen von $\overline{B}_q$.

8. Die Beziehungen (29) und (30) stellen das wesentliche Ergebnis unserer Rechnung dar. Die erstere, welche als Verallgemeinerung von (8) zu betrachten ist, verknüpft $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ mit $\overline{\boldsymbol{B}}$ und seinen räumlichen und zeitlichen Ableitungen. Die letztere legt die dabei auftretenden Koeffizienten fest. In diese gehen die Greenschen Funktionen G_{il}, die durch $\overline{\boldsymbol{v}}$ bestimmt werden, sowie die Korrelationstensoren $\overline{v_j'\,v_p'}$, $\overline{v_j'\,v_{j'}'\,v_p'}, \ldots$ für das $\boldsymbol{v}'$-Feld ein.

Der Einfachheit halber hatten wir einen allseitig unendlich ausgedehnten räumlichen Bereich betrachtet und die Anfangsbedingung $\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{x}, t_0) = 0$ eingeführt. Es ist nunmehr leicht zu übersehen, daß die letztere in der ersten Näherung durch

$$\overline{v_j'(\boldsymbol{x}, t)\,B_l'(\boldsymbol{x}', t_0)} = 0$$

und in der zweiten durch dies zusammen mit

$$\overline{v_j'(\boldsymbol{x}, t)\,v_{j'}'(\boldsymbol{x}', t')\,B_l'(\boldsymbol{x}'', t_0)} = 0$$

zu ersetzen ist. Beide Bedingungen können für alle $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ und $\boldsymbol{x}''$ als erfüllt betrachtet werden, falls $t - t_0$ nicht zu klein ist. Bei höheren Näherungen treten neben jenen Bildungen zweiter und dritter auch solche höherer Stufe auf, und schon die vierter Stufe kann im allgemeinen für ein beliebig großes $t - t_0$ endliche Werte annehmen. Dank der Eigenschaften der G_{il} ist dies aber von untergeordneter Bedeutung. Der Einfluß jener Anfangsbedingung erstreckt sich, wie von vornherein zu erwarten war, auch bei höheren Näherungen nur auf gewisse kleine $t - t_0$. Wählt man $t_0 \to \infty$, so wird sie völlig unwesentlich.

Die Vorstellung, daß $K_{iq}(\boldsymbol{x}, t;\ \boldsymbol{\xi}, \tau)$ nur für gewisse kleine $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|$ und $t - \tau$ beträchtlich von Null abweiche, läßt sich nach (26) und (27) bezüglich der ersten und zweiten Näherung dadurch begründen, daß man das gleiche bei $\overline{v_j'(\boldsymbol{x},t)\, v_p'(\boldsymbol{\xi},\tau)}$ und $\overline{v_j'(\boldsymbol{x},t)\, v_{j'}'(\boldsymbol{x}',t')\, v_p'(\boldsymbol{\xi},\tau)}$ voraussetzen darf. Was die höheren Näherungen betrifft, so hat man einen ähnlichen Sachverhalt, wie er eben für die Anfangsbedingung geschildert wurde; um jene Vorstellung zu rechtfertigen, muß man wieder die Eigenschaften der G_{il} ausnutzen.

Bei dem Näherungsverfahren, welches wir im vorangehenden verwendet haben, ist natürlich zunächst an kleine $\boldsymbol{v}'$ zu denken. Da aber (25) und insbesondere (29) und (30) für beliebig hohe Näherungen gelten, dürfen diese Beziehungen, soweit das Verfahren konvergiert, als exakt betrachtet werden.

Symmetriebetrachtungen für $g_{iq}^{(0\nu)}, g_{iqr}^{(1\nu)}, \ldots$

1. Wir wollen nun die Symmetriebetrachtungen, die im Zusammenhang mit (8) für a_{ij} und b_{ijk} durchgeführt wurden, auf die in (29) auftretenden $g_{iq}^{(0\nu)}$, $g_{iqr}^{(1\nu)}$, ... übertragen und ein wenig ausbauen. Dies wird einen gewissen Überblick darüber liefern, was bei der Ausrechnung der $g_{iq}^{(0\nu)}$, $g_{iqr}^{(1\nu)}$, ... in einigen einfacheren Fällen zu erwarten ist.

Die Überlegungen, auf die es dabei ankommt, gelten unabhängig davon, in welcher Näherung die $g_{iq}^{(0\nu)}$, $g_{iqr}^{(1\nu)}$, ... betrachtet werden. Auch der Wert von ν ist unwesentlich. Da ferner die Zahl der Indizes immer zu erkennen sein wird, bleibt die Kennzeichnung $(0\,\nu)$, $(1\,\nu)$, ... bis auf weiteres weg.

Während a_{ij} und b_{ijk} nur für $\overline{\boldsymbol{v}}=0$ untersucht wurden, soll nun bei g_{iq}, g_{iqr}, ... auch $\overline{\boldsymbol{v}}\neq 0$ zugelassen werden. Die letzteren sind demnach als Funktionale von $\boldsymbol{v}=\overline{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{v}'$ aufzufassen.

Der Einfachheit halber wollen wir g_{iq}, g_{iqr}, ... stets für den Ursprung des Koordinatensystems betrachten. Solange das letztere beliebig verschoben werden darf, bedeutet dies keinerlei Einschränkung. Das $\boldsymbol{v}$-Feld interessiert natürlich im folgenden nur in einer bestimmten Umgebung des Ursprungs, deren Größe mit seinen Korrelationseigenschaften zusammenhängt.

Wir bezeichnen ein $\boldsymbol{v}$-Feld bezüglich einer gegebenen Achse als „im Mittel drehungsinvariant", wenn alle aus $\boldsymbol{v}$ ableitbaren gemittelten Größen bei beliebigen Drehungen dieses Feldes um jene Achse ungeändert bleiben. Zeigt ein $\boldsymbol{v}$-Feld diese Eigenschaft bezüglich zweier verschiedener Achsen, die einander schneiden, so muß es dieselbe hinsichtlich aller Achsen aufweisen, die den Schnittpunkt enthalten. Durch einen jeden Punkt kann also höchstens eine in diesem Sinne bevorzugte Achse verlaufen.

Wir nennen weiterhin ein $\boldsymbol{v}$-Feld bezüglich einer gegebenen Ebene oder eines gegebenen Punktes „im Mittel spiegelungsinvariant", wenn die genannten Größen durch die Spiegelung dieses Feldes an jener Ebene oder an jenem Punkt nicht beeinflußt werden. Sobald letzteres wenigstens hinsichtlich einer Ebene oder eines Punktes gilt, kann in der Bewegung des Mediums kein bevorzugter Schraubensinn vorhanden sein.

2. Zunächst soll vorausgesetzt werden, daß das $\boldsymbol{v}$-Feld wenigstens bezüglich zweier verschiedener Achsen, die durch den Ursprung verlaufen, folglich hinsichtlich aller solcher Achsen im Mittel drehungsinvariant sei. Dies wird im allgemeinen an $\overline{\boldsymbol{v}}=0$ gebunden sein.

Mit sinngemäß gleichen Überlegungen, wie sie für a_{ij} und b_{ijk} durchgeführt wurden, läßt sich daraus folgern, daß g_{iq}, g_{iqr}, ... isotrope Tensoren sind. Für die zweite und dritte Stufe stimmen die letzteren, wie gesagt, bis auf skalare Faktoren mit δ_{ij} und ε_{ijk} überein, und für höhere Stufen können sie als Summe von Produkten aus denen zweiter und dritter Stufe dargestellt werden. So ergibt sich

$$\begin{aligned}
g_{iq} &= \gamma\,\delta_{iq}\,,\\
g_{iqr} &= \delta\,\varepsilon_{iqr}\,,\\
g_{iqrs} &= \varepsilon_1\,\delta_{iq}\,\delta_{rs}+\varepsilon_2\,\delta_{ir}\,\delta_{qs}+\varepsilon_3\,\delta_{is}\,\delta_{qr}\,,\\
g_{iqrst} &= \zeta_1\,\delta_{iq}\,\varepsilon_{rst}+\zeta_2\,\delta_{ir}\,\varepsilon_{qst}+\zeta_3\,\delta_{is}\,\varepsilon_{qrt}+\zeta_4\,\delta_{it}\,\varepsilon_{qrs}\\
&\quad+\zeta_5\,\delta_{qr}\,\varepsilon_{ist}+\zeta_6\,\delta_{qs}\,\varepsilon_{irt}+\zeta_7\,\delta_{qt}\,\varepsilon_{irs}\\
&\quad+\zeta_8\,\delta_{rs}\,\varepsilon_{iqt}+\zeta_9\,\delta_{rt}\,\varepsilon_{iqs}+\zeta_{10}\,\delta_{st}\,\varepsilon_{iqr}\,,
\end{aligned}\tag{31}$$

wobei γ, δ, ε_1, ε_2, ε_3, ζ_1, ... skalare Funktionale von $\boldsymbol{v}$ bedeuten.

Für die Bestimmung von $\overline{\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{B}'}$ können, wie (29) erkennen läßt, von den in (31) aufgeschriebenen Termen nur die mit γ, δ, ε_1, ζ_8, ζ_9 und ζ_{10} behafteten eine Rolle spielen; die übrigen dürfen teils wegen $\partial\overline{B}_q/\partial x_q=0$, teils wegen der Symmetrie von $\partial^3\overline{B}_q/\partial x_r\,\partial x_s\,\partial x_t$ in r, s und t gestrichen werden. Die Summanden von $\overline{\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{B}'}$, die den ersteren entsprechen, sind Produkte skalarer Funktionale von $\boldsymbol{v}$ mit

$$\overline{\boldsymbol{B}},\quad \operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{B}},\quad \Delta\overline{\boldsymbol{B}},\quad \operatorname{rot}\Delta\overline{\boldsymbol{B}}\tag{32}$$

und derartigen Ausdrücken, in denen $\overline{\boldsymbol{B}}$ durch seine Zeitableitungen ersetzt ist.

3. Wir verlangen weiterhin vom $\boldsymbol{v}$-Feld, daß es wenigstens bezüglich einer den Ursprung enthaltenden Ebene im Mittel spiegelungsinvariant sei. Dann muß das gleiche auch hinsichtlich des Ursprungs gelten.

Auf dem Wege, auf dem wir das Verhalten der mit a_{ij} und b_{ijk} zusammenhängenden α und β bei Spiegelung des $\boldsymbol{v}'$-Feldes am Ursprung ergründet haben, sind auch entsprechende Aussagen über g_{iq}, $g_{iqr}, \ldots$ zu gewinnen. Es zeigt sich, daß die letzteren bei einer solchen Spiegelung, soweit sie eine gerade Stufenzahl besitzen, lediglich ihr Vorzeichen wechseln und, wenn es sich um eine ungerade Stufenzahl handelt, völlig ungeändert bleiben.

Demnach hat man in (31) weiterhin die Terme mit γ und ε_1 zu streichen, und in (32) fallen somit $\overline{\boldsymbol{B}}$ und $\Delta\overline{\boldsymbol{B}}$ weg.

4. Wir wollen uns nun mit solchen Fällen befassen, in denen das $\boldsymbol{v}$-Feld nur bezüglich einer einzigen durch den Ursprung verlaufenden Achse im Mittel drehungsinvariant ist. Um die Richtung dieser Achse zu kennzeichnen, führen wir einen dazu parallelen Einheitsvektor $\boldsymbol{\lambda}$ ein; wie sein Vorzeichen festgelegt wird, ist vorerst belanglos. Auf Ursachen, die eine solche bevorzugte Achse im $\boldsymbol{v}$-Feld bewirken können, werden wir später eingehen.

Unter diesen Umständen müssen die Komponenten von g_{iq}, $g_{iqr}, \ldots$ gegenüber Drehungen des Koordinatensystems um jene Achse invariant sein. Tensoren, deren Komponenten diese Eigenschaft besitzen, lassen sich durch Überschiebung isotroper Tensoren mit λ_i, $\lambda_i \lambda_j, \ldots$ darstellen. Man findet so

$$\begin{aligned} g_{iq} &= \gamma_1\,\delta_{iq} + \gamma_2\,\varepsilon_{iqj}\,\lambda_j + \gamma_3\,\lambda_i\,\lambda_q\,,\\ g_{iqr} &= \delta_1\,\varepsilon_{iqr} + \delta_2\,\delta_{iq}\,\lambda_r + \delta_3\,\delta_{ir}\,\lambda_q + \delta_4\,\delta_{qr}\,\lambda_i \\ &\quad + \delta_5\,\varepsilon_{iqj}\,\lambda_j\,\lambda_r + \delta_6\,\varepsilon_{irj}\,\lambda_j\,\lambda_q + \delta_7\,\varepsilon_{qrj}\,\lambda_j\,\lambda_i \\ &\quad + \delta_8\,\lambda_i\,\lambda_q\,\lambda_r\,, \end{aligned} \tag{33}$$

wobei γ_1, γ_2, γ_3, $\delta_1, \ldots$ skalare Funktionale von $\boldsymbol{v}$ sind.

Im Hinblick auf $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ ist von den in (33) angegebenen Termen der mit δ_4 wegen $\partial \overline{B}_q / \partial x_q = 0$ bedeutungslos. Die anderen liefern Summanden von $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$, die bis auf skalare Funktionale von $\boldsymbol{v}$ durch

$$\begin{gathered} \overline{\boldsymbol{B}},\ \boldsymbol{\lambda} \times \overline{\boldsymbol{B}},\ \boldsymbol{\lambda}\,(\boldsymbol{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{B}}),\\ \operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{B}},\ (\boldsymbol{\lambda}\,\mathrm{grad})\,\overline{\boldsymbol{B}},\ \boldsymbol{\lambda}\,\mathfrak{grad}\,\overline{\boldsymbol{B}},\\ \boldsymbol{\lambda} \times (\boldsymbol{\lambda}\,\mathrm{grad})\,\overline{\boldsymbol{B}},\ \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\lambda}\,\mathfrak{grad}\,\overline{\boldsymbol{B}},\boldsymbol{\lambda}\,(\boldsymbol{\lambda}\,\mathrm{rot}\,\overline{\boldsymbol{B}}),\\ \boldsymbol{\lambda}\,(\boldsymbol{\lambda}\,(\boldsymbol{\lambda}\,\mathrm{grad})\,\overline{\boldsymbol{B}}) \end{gathered} \tag{34}$$

und entsprechende Ausdrücke gegeben werden, in denen an Stelle von $\overline{\boldsymbol{B}}$ dessen Zeitableitungen auftreten. Dabei soll $(\boldsymbol{\lambda}\,\mathfrak{grad}\,\overline{\boldsymbol{B}})_i = \lambda_j\ \partial \overline{B}_j / \partial x_i$ sein.

5. Wir setzen zunächst $\overline{\boldsymbol{v}} = 0$ und nehmen an, daß die bevorzugte Achse durch eine Ortsabhängigkeit von $\overline{v'^2}$ gegeben wird. Genauer gesagt, soll $\mathrm{grad}\,\overline{v'^2}$ in der interessierenden Umgebung des Ursprungs konstant sein und $\boldsymbol{\lambda}$ parallel dazu gewählt werden.

Soweit dies zutrifft, kann das $\boldsymbol{v}$-Feld höchstens bezüglich der den Ursprung und $\boldsymbol{\lambda}$ enthaltenden Ebenen im Mittel spiegelungsinvariant sein. Wir wollen aber nicht von einer solchen Annahme ausgehen, sondern verlangen, daß g_{iq}, $g_{iqr}, \ldots$ bei Spiegelung des $\boldsymbol{v}$-Feldes an der durch den Ursprung verlaufenden und zu $\boldsymbol{\lambda}$ senkrechten Ebene nur in dem Maße beeinflußt werden, in dem sich $\boldsymbol{\lambda}$ ändert. Das gleiche muß dann auch für die Spiegelung am Ursprung gelten. In beiden Fällen geht $\boldsymbol{\lambda}$ in $-\boldsymbol{\lambda}$ über. Für (33) bedeutet dies, daß γ_1, γ_3, δ_2, δ_3 und δ_8 verschwinden, und in (34) fallen daher $\overline{\boldsymbol{B}}$, $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{B}})$, $(\boldsymbol{\lambda}\mathrm{grad})\,\overline{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{\lambda}\,\mathfrak{grad}\,\overline{\boldsymbol{B}}$ und $\boldsymbol{\lambda}\,(\boldsymbol{\lambda}\,(\boldsymbol{\lambda}\,\mathrm{grad})\,\overline{\boldsymbol{B}})$ weg.

Wie alle bisher eingeführten Spiegelungsbedingungen, so schließt auch die eben benutzte das Vorhandensein eines bevorzugten Schraubensinnes in der Bewegung des Mediums aus. Sie bildet aber die erste unter ihnen, die mit dem Auftreten eines Summanden von $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ verträglich ist, der $\overline{\boldsymbol{B}}$ selbst und nicht nur dessen Ableitungen enthält. Der letztere ist proportional zu $\boldsymbol{\lambda} \times \overline{\boldsymbol{B}}$ oder, anders gesagt, zu $\mathrm{grad}\,\overline{v'^2} \times \overline{\boldsymbol{B}}$. Er wird uns später [14] Anlaß bieten, neben einer turbulenzbedingten Leitfähigkeitsänderung auch eine solche Permeabilitätsänderung einzuführen.

6. In einem weiteren Beispiel beschreibe $\overline{\boldsymbol{v}}$, soweit es interessiert, eine starre Rotation um eine durch den Ursprung verlaufende Achse, welche natürlich die Rolle der bevorzugten Achse übernimmt. Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist dann als konstant zu betrachten, und $\boldsymbol{\lambda}$ soll parallel dazu sein.

Wir verwenden nun die naheliegende Annahme, daß das $\boldsymbol{v}$-Feld bezüglich der durch den Ursprung verlaufenden, zu $\boldsymbol{\lambda}$ senkrechten Ebene im Mittel spiegelungsinvariant sei. Dann muß das gleiche auch hinsichtlich einer Spiegelung am Ursprung gelten. Dies verlangt, daß die in (33) auftretenden γ_1, γ_2 und γ_3 verschwinden. In (34) sind auf Grund dessen $\overline{\boldsymbol{B}}$, $\boldsymbol{\lambda} \times \overline{\boldsymbol{B}}$ und $\boldsymbol{\lambda}\,(\boldsymbol{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{B}})$ zu streichen.

Wegen der Voraussetzung, daß die Rotationsachse durch den Ursprung des Koordinatensystems verlaufe, darf man das letztere nicht mehr beliebig

[14] K.-H. Rädler, Z. Naturforsch. **23 a**, 1851 [1968].

verschieben. Unsere Überlegungen können daher zunächst nur Aussagen über das auf der Rotationsachse anzutreffende $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ liefern. Es läßt sich zeigen, daß diese auch für beliebige andere Punkte gelten, sofern die oben für $\boldsymbol{v}$ erhobenen Forderungen dort wenigstens von $\boldsymbol{v}'$ befriedigt werden. Wir begnügen uns mit dieser Andeutung, weil wir die hier betrachteten Verhältnisse ohnehin später ausführlicher behandeln möchten [15].

[15] K.-H. Rädler, Z. Naturforsch., in Vorbereitung.

7. Auf Grund ähnlicher Betrachtungen, wie wir sie hier erläutert haben, kann man auch für $\boldsymbol{v}$-Felder mit weniger einfachen Symmetrieeigenschaften Aussagen über $\overline{g_{iq}, g_{iqr}}, \ldots$ gewinnen und damit erkennen, wie $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ aufgebaut ist. Es bleiben aber grundsätzlich gewisse skalare Koeffizienten unbestimmt. Diese müssen anderweitig, etwa mit Hilfe von (30), ermittelt werden. Natürlich ist es möglich, daß einige von ihnen und damit die entsprechenden Summanden in $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ verschwinden.

Zur Elektrodynamik turbulent bewegter leitender Medien

II. Turbulenzbedingte Leitfähigkeits- und Permeabilitätsänderungen

K.-H. Rädler

Institut für Magnetohydrodynamik Jena der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

(Z. Naturforsch. **23 a**, 1851—1860 [1968]; eingegangen am 22. August 1968)

In a foregoing paper the foundations for an electrodynamics of mean fields in turbulently moving electrically conducting media were developed. With the method demonstrated there a special case is treated. The turbulence is supposed to deviate from a homogeneous isotropic one showing reflexion symmetry, only due to a gradient of intensity, i. e. of the mean square velocity. The calculations are carried out for small intensities. As a result, expressions for the modified conductivity introduced for homogeneous turbulence in the foregoing paper are given and discussed. The effect of the intensity gradient is illustrated by a simple example. Furthermore, a possibility is shown for describing the general result in terms of modified conductivity and permeability.

Einführung

1. In der vorangehenden Untersuchung [1], die im folgenden kurz mit I bezeichnet wird, haben wir die Grundzüge einer Elektrodynamik der mittleren Felder in turbulent bewegten, elektrisch leitenden kontinuierlichen Medien entwickelt.

Als Ausgangspunkt dienten Maxwellsche Gleichungen und ergänzende Materialgleichungen mit den in der nichtrelativistischen Magnetohydrodynamik üblichen Vernachlässigungen. Es wurde die magnetische Kraftflußdichte $\boldsymbol{B}$ eingeführt, weiterhin die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$, die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$, die elektrische Stromdichte $\boldsymbol{j}$ und die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, mit der sich das Medium bewegt. Sowohl die magnetische Permeabilität μ als auch die elektrische Leitfähigkeit σ galten als orts- und zeitunabhängig. Feldgrößen wie $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{j}$ müssen, wenn $\boldsymbol{v}$ einer turbulenten Bewegung entspricht, gleich diesem unregelmäßige räumliche und zeitliche Schwankungen aufweisen. In Anbetracht dessen sind mittlere Feldgrößen wie $\overline{\boldsymbol{B}}$, $\overline{\boldsymbol{E}}$, $\overline{\boldsymbol{H}}$, $\overline{\boldsymbol{j}}$ und $\overline{\boldsymbol{v}}$ mit einem weniger verwickelten räumlichen und zeitlichen Verlauf erklärt sowie im Mittel verschwindende Differenzen zwischen den ersteren und den letzteren wie $\boldsymbol{B}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{j}'$ und $\boldsymbol{v}'$ eingeführt worden.

Wir haben die Aufgabe jener Elektrodynamik der mittleren Felder darin gesehen, das Verhalten von $\overline{\boldsymbol{B}}$, $\overline{\boldsymbol{H}}$, $\overline{\boldsymbol{E}}$ und $\overline{\boldsymbol{j}}$ zu bestimmen, wenn $\overline{\boldsymbol{v}}$ und gewisse für $\boldsymbol{v}'$ kennzeichnende Größen gegeben sind. Unsere Überlegungen lieferten zunächst die Gln. (I. 5) und (I. 6), nämlich

$$\operatorname{rot} \overline{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \overline{\boldsymbol{B}}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \overline{\boldsymbol{H}} = \overline{\boldsymbol{j}}, \quad \operatorname{div} \overline{\boldsymbol{B}} = 0, \qquad (1)$$
$$\overline{\boldsymbol{B}} = \mu \overline{\boldsymbol{H}}, \quad \overline{\boldsymbol{j}} = \sigma(\overline{\boldsymbol{E}} + \overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}} + \overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}),$$

und weiterhin die Feststellung, daß $\overline{\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}'}$ als Funktional von $\overline{\boldsymbol{B}}$, $\overline{\boldsymbol{v}}$ und $\boldsymbol{v}'$ aufgefaßt werden darf. Die genannte Aufgabe ist als grundsätzlich gelöst anzu-

[1] K.-H. Rädler, Z. Naturforsch. **23 a**, 1841 [1968].